ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2016–2017 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (7 баллов) В равенстве 1 – 2 – 4 – 8 – 16 = 19 поставьте несколько знаков модуля так, чтобы оно стало верным.

Ответ. $\left|\left|1-2\right|-\left|4-8\right|-16\right|=19$.

Существуют и другие примеры.
Комментарий. Достаточно привести один пример. Пояснять, как он получен, не требуется.
Критерии проверки.

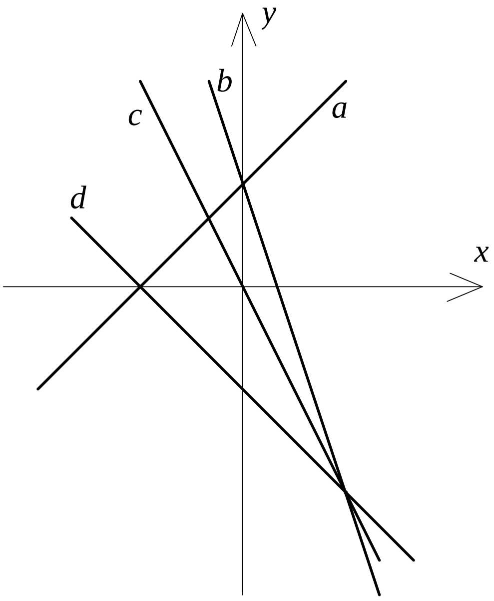
- Любой верный пример — 7 баллов.

2. (7 баллов) Чебурашка и Гена съели торт. Чебурашка ел вдвое медленнее Гены, но начал есть на минуту раньше. В итоге им досталось торта поровну. За какое время Чебурашка съел бы торт в одиночку?

Ответ. За 4 минуты.
Решение.
Первый способ. Если Чебурашка ест вдвое медленнее Гены, то, чтобы съесть столько же торта, сколько съел Гена, ему нужно в два раза больше времени. Значит, то время, которое Чебурашка ел в одиночку (1 минута), составляет половину всего времени, за которое Чебурашка съел половину торта. Таким образом половину торта он съел за 2 минуты, а весь торт съел бы за 4 минуты.
Второй способ. Пусть Гена съедает весь торт за x минут, тогда Чебурашке на весь торт нужно $2x$ минут. Каждому из них досталась половина торта, то есть Гена ел $0{,}5x$ минут, а Чебурашка x минут. Из условия следует, что $0{,}5x + 1 = x$, откуда $x = 2$. Значит, Чебурашка съест торт за $2\cdot 2 = 4$ минуты.
Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно составлено и решено уравнение или проведены верные рассуждения, но дан ответ не на тот вопрос — 6 баллов.
- Решение, в котором рассмотрена конкретная масса торта, — 2 балла.
- Уравнение составлено верно, но решено неверно — 2 балла.
- Приведён верный ответ, и проверено, что он удовлетворяет условию задачи, — 1 балл.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

3. (7 баллов) Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.



1) $y=-2x$

2) $y=x+12$

3) $y=-3x$

4) $y=$

Ответ. 3) $y = -3x + 12$; 4) $y = -x - 12$.

Решение. Из четырёх прямых только прямая a имеет положительный угловой коэффициент, следовательно, она задаётся уравнением 2 и пересекает оси координат в точках (0; 12) и (–12; 0).

Так как уравнение 1 Дима записал полностью, его графиком является прямая, проходящая через начало координат, то есть прямая c.

У прямой b модуль углового коэффициента больше, чем у прямой c, значит, начало уравнения прямой b Дима записал под номером 3. Так как эта прямая проходит через точку (0;12), она задаётся уравнением $y = -3x + 12$.

Прямая d проходит через точку (–12;0) и через точку (12; –24) – точку пересечения прямых b и c, координаты которой легко находятся как решение системы линейных уравнений: $y = -3x + 12$ и $y = -2x$.

Найдём уравнение прямой d. Для этого рассмотрим систему двух уравнений: $0 = -12k_4 + b_4$; $-24 = 12k_4 + b_4$. Сложив эти уравнения, получим $b_4 = -12$. Подставив в первое уравнение, получим $k_4 = -1$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- В целом верное решение, в котором допущены арифметические ошибки, — 4 балла.
- Обоснованно найдены уравнения трёх прямых — 3 балла.
- Если в решении указано, какие из изображённых прямых задаются уравнениями 1 и 2, но более не найдено ничего — 1 балл.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

4. (7 баллов) Три школьника сделали по два утверждения про натуральные числа a, b, c:

Антон: 1) $a + b + c = 34$; 2) $abc = 56$;
Борис: 1) $ab + bc + ac = 311$ 2) наименьшее из чисел равно 5;
Настя: 1) $a = b = c$ 2) числа a, b и c — простые.

У каждого школьника одно утверждение верное, а другое — нет. Найдите числа a, b, c.

Ответ. 2, 13, 19 (в любом порядке).

Решение. Если из утверждений Антона верно второе утверждение, то оба утверждения Насти неверны. Значит, $a + b + c = 34$. Таким образом, верно второе Настино утверждение. Так как сумма трёх простых чисел равна 34, они не могут все быть нечётными, и одно из них равно 2. Значит, из утверждений Бориса верно первое утверждение.

Пусть для определённости $a = 2$. Тогда $b + c = 32$.

Далее можно перебрать все пары простых чисел, дающие в сумме 32, и проверить для них равенство $ab + bc + ac = 311$.

Но можно поступить так:

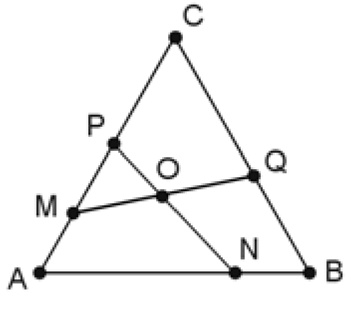
$$311 = ab + bc + ac = a(b + c) + bc = 64 + bc, \text{ откуда } bc = 247.$$

Так как $247 = 19 \cdot 13$, получаем что $b = 13$, $c = 19$ (или наоборот).

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Проведено верное рассуждение о том, какие утверждения верны, а какие нет, но сами числа не найдены или найдены неверно — 3 балла.
- Приведён верный ответ с проверкой того, что он удовлетворяет всем условиям задачи, но без доказательства того, что других решений нет, — 2 балла.
- Обоснованно указаны 2 верных утверждения из трёх — 1 балл.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

5. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P, Q расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите величину угла NOQ.



Ответ. 60°

Решение. По условию задачи $AN = a - AM$, следовательно, $AN = MC$. Аналогично $AP = QC$. Из этих равенств и равенства $\angle A = \angle C = 60°$ следует, что $\Delta ANP = \Delta CMQ$. Отсюда $\angle ANP = \angle QMC$, $\angle APN = \angle MQC$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ANP + \angle APN = 120°$, поэтому $\angle OMP + \angle OPM = 120°$, а значит, $\angle MOP = 60°$. Углы MOP и NOQ вертикальные, поэтому $\angle NOQ = 60°$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Доказано, что треугольники ANP и QCM равны, но дальнейших продвижений нет или они неверны — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

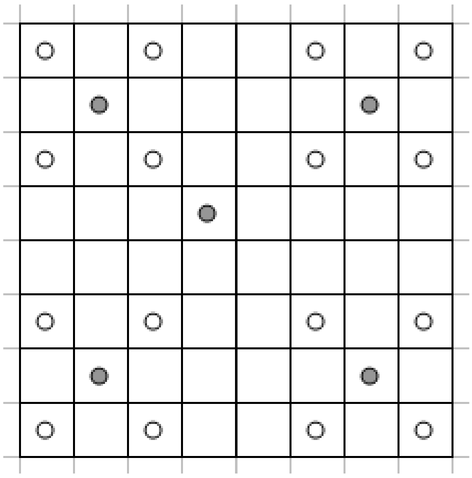
6. (7 баллов) На шахматной доске стоял 21 король. Каждый из королей находился под боем хотя бы одного из остальных. После того как несколько королей убрали, никакие два из оставшихся королей друг друга не бьют. Какое наибольшее число королей могло остаться?

а) Приведите пример исходной расстановки и отметьте убранных королей.

б) Докажите, что большее число королей остаться не могло.

Ответ. б) 16.

Решение. Заметим, что каждый король, снятый с доски, мог бить не более 4 из оставшихся (иначе и некоторые из оставшихся били бы друг друга). Поэтому число оставшихся королей не может превосходить число снятых более чем в 4 раза, то есть не может быть больше 16. Пример приведён на рисунке: серым обозначены короли, которых необходимо убрать.



Критерии проверки.

- Любое полное верное решение обоих пунктов — 7 баллов.
- Верно решён только один пункт — 3 балла
- Приведён только ответ — 0 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 42.